

UNE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE DU PENDULE

par Sir George GREENHILL (Londres).

Tout étudiant en dynamique élémentaire et en physique est tenu de connaître la démonstration de la formule donnant la période du pendule simple pour des oscillations de faible amplitude; mais la méthode employée dans les traités qu'il a à sa disposition manque de rigueur, car la formule donnant la durée d'une oscillation simple, à savoir

$$(A) \quad \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

n'est démontrée qu'approximativement.

Comme cette valeur n'est jamais rigoureusement exacte, sauf dans le cas idéal d'un mouvement imperceptible du pendule, il est préférable d'abandonner toute approximation, et de démontrer que cette valeur (A) n'est qu'une limite inférieure, jamais atteinte en réalité, mais suffisamment approchée pour répondre aux besoins de la pratique, d'autant plus qu'une limite supérieure pourra se calculer aussi facilement.

On pourra alors en déduire la correction circulaire de l'amplitude d'oscillation, et l'étudiant se rendra compte du degré d'approximation de la formule (A) pour une oscillation réelle du pendule.

La méthode suivante est soumise à l'attention des professeurs; tout calcul approximatif a été évité; on y a introduit par contre les symboles d'inégalité suivant les démonstrations analytiques modernes.

1. — Un point P oscille sur un arc de cercle de B à B', à

Mais les cordes BP et PB' sont respectivement plus petites que les arcs BP et PB'; de sorte que

$$(2) \quad (\text{vitesse de P})^2 < \frac{g}{l} \cdot \text{arc BP} \cdot \text{arc PB}' .$$

On pourra reporter l'arc BPAB' le long de la tangente au point le plus bas A du cercle, on obtiendra alors l'horizontale FTAF', que l'on pourra étendre uniformément dans un rapport quelconque de façon à la rendre visible.

La figure n'est pas exactement conforme à ce qui vient d'être dit, car F a été choisi sur le prolongement de EB et T sur le prolongement de EP, comme l'exige une discussion subséquente; on n'a fait qu'une seule figure afin d'économiser de la place.

Traçons le cercle de diamètre FF' et son ordonnée TR, nous aurons :

$$(3) \quad (\text{vitesse de T})^2 < \frac{g}{l} \cdot FT \cdot TF' < \frac{g}{l} \cdot \overline{TR}^2 ;$$

$$(4) \quad (\text{vitesse de R})^2 < \frac{g}{l} \cdot \overline{AR}^2 ,$$

(en vertu du triangle de vitesse ATR).

Lorsque P oscille de B à B', ou T de F à F', le point R décrit un demi-cercle de F à F' avec une vitesse moindre que $\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot AR$, de sorte que, $\pi \cdot AR$ étant le demi-cercle décrit sur FF';

$$(5) \text{ La durée d'une oscillation de B à B}' > \frac{\pi \cdot AR}{\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot AR} \quad \text{ou} \quad > \pi \sqrt{\frac{l}{g}} ,$$

et l'inégalité $>$ se rapproche de plus en plus de l'égalité $=$ à mesure que l'arc BAB' devient plus petit et finit par s'évanouir.

On pourrait remarquer ici que $\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot AR$ est la vitesse du pendule conique de longueur OF et de hauteur OA, décrivant le cercle FRF', en supposant que ce cercle ait tourné

autour de FF' de façon à devenir horizontal; et la période de révolution est $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, la limite inférieure de la période d'une double oscillation du point P.

S'il s'agit d'une étude élémentaire du pendule, ce qui précède peut être considéré comme suffisant; mais dans la démonstration habituelle, on enseigne à l'étudiant que le mouvement du point P finit par être un mouvement harmonique simple en ligne droite, l'inégalité (2) est alors remplacée par l'égalité, et la vitesse varie comme la moyenne géométrique de la distance des extrémités de la vibration.

« Mouvement harmonique simple » est le terme employé dans la *Natural Philosophy* de THOMSON et TAIT dans l'analyse de la vibration d'un son musical périodique par une série de Fourier. Ce terme est très peu commode lorsqu'on l'applique au pendule et l'on pourrait avantageusement le remplacer, comme on l'a proposé, par le mot vibration simple, qui est plus expressif et plus familier.

Nous dirons donc que le pendule n'effectue une vibration simple que dans le cas d'un mouvement imperceptible.

Dès que le mouvement devient perceptible, il faut avoir recours aux fonctions elliptiques pour résoudre le problème; on peut dire dans ce cas que le pendule « bat la fonction elliptique ».

2. — Pour compléter les considérations élémentaires précédentes qui déterminent une limite inférieure de la durée d'oscillation, il est nécessaire d'en déterminer également une limite supérieure; nous continuons donc cette théorie en évitant toute approximation et en adoptant une méthode qui serait aussi applicable au cas où la question serait traitée rigoureusement par les fonctions elliptiques.

Nous projetons le mouvement, comme en projection stéréographique, par des rayons émanant de E, le point le plus élevé du cercle sur lequel se meut le point P, analogues à des rayons lumineux issus d'une source lumineuse placée en E; et nous considérons le mouvement de l'ombre T sur la tangente horizontale en A, le point le plus bas du cercle.

En conservant les mêmes lettres, et en supposant que T

oscille entre F et F' on a :

$$(6) \quad EP \cdot ET = EB \cdot EF = \overline{EA}^2 .$$

La droite EPT coupe le cercle AP et la droite AT suivant le même angle, de sorte que :

$$(7) \quad \frac{\text{vitesse de T}}{\text{vitesse de P}} = \frac{ET}{EP} = \frac{\overline{ET}^2}{\overline{EA}^2} = \frac{\overline{ET}^2}{EB \cdot EF} ,$$

La similitude des triangles EBP, ETF, et des triangles EB'P, ETF', montre que :

$$(8) \quad \frac{BP}{FT} = \frac{EB}{ET} = \frac{PB'}{TF'} ;$$

$$(9) \quad BP \cdot PB' = \frac{EB^2}{ET^2} \cdot FT \cdot TF' = \frac{\overline{EB}^2}{\overline{ET}^2} \cdot \overline{TR}^2 ,$$

par conséquent, d'après (7)

$$(10) \quad \begin{aligned} (\text{vitesse de T})^2 &= (\text{vitesse de P})^2 \cdot \frac{\overline{ET}^4}{\overline{EB}^2 \cdot \overline{EF}^2} \\ &= \frac{g}{l} \cdot BP \cdot PB' \cdot \frac{\overline{ET}^4}{\overline{EB}^2 \cdot \overline{EF}^2} = \frac{g}{l} \cdot \frac{\overline{ET}^2}{\overline{EF}^2} \cdot \overline{TR}^2 , \end{aligned}$$

$$(11) \quad \text{vitesse de R} = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{ET}{EF} \cdot AR ,$$

à cause du triangle de vitesse ATR.

Dans le cas de petites oscillations, ET se déplace très peu entre les limites EF et EA, on a donc :

$$(12) \quad \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot AR > \text{vitesse de R} > \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{EA}{EF} \cdot AR ;$$

et, en tenant compte de (5)

$$(13) \quad \pi \sqrt{\frac{l}{g}} < \text{durée d'oscillation de B à B'} < \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{EF}{EA} ;$$

ce qui donne les limites inférieure et supérieure; de plus, la limite supérieure tend vers la limite inférieure à mesure que l'amplitude des oscillations diminue.

A moins qu'il ne s'agisse d'une étude très élémentaire du

pendule, cette seconde démonstration pourra remplacer la première, car elle n'est que légèrement plus compliquée.

3. — Si l'on représente l'angle d'oscillation BOB' par 2α , la moyenne géométrique des limites (13) sera

$$(14) \quad \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{EF}{EA}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \frac{1}{2} \alpha}},$$

comme si le plan d'oscillation était incliné d'un angle $\frac{1}{2} \alpha$ sur le vertical; cela nous donne la durée d'oscillation avec assez d'exactitude et nous permet d'estimer l'erreur circulaire due à l'amplitude de cette oscillation et la quantité dont le mouvement réel du pendule s'écarte du véritable mouvement harmonique, ou vibration simple, comme nous l'avons appelé.

Comme l'angle α est petit, nous pouvons écrire

$$(15) \quad \pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \frac{1}{2} \alpha}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha\right)^{-\frac{1}{4}} \\ = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \dots\right),$$

de sorte que l'erreur circulaire ou correction fractionnaire sera pratiquement

$$(16) \quad \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{4} \frac{AD}{AE} = \frac{1}{8} \frac{AD}{l}.$$

Mais comme le *sin vers.* AD est difficile à mesurer, on pourra l'exprimer en fonction de BB' par la formule approximative

$$(17) \quad \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{AB}{AE}\right)^2 = \frac{1}{64} \left(\frac{BB'}{l}\right)^2,$$

et BB' peut être facilement mesuré avec exactitude sur une échelle horizontale.

La durée réelle d'une oscillation dépasse de

$$(18) \quad \frac{100}{64} \left(\frac{BB'}{l}\right)^2 \text{ pour cent}$$

la durée de l'oscillation idéale d'amplitude imperceptible.

En d'autres termes, pour ramener la durée observée de l'oscillation visible à la formule (A) qui n'est valable que pour les oscillations infiniment petites, il faut la réduire par une correction circulaire de même pourcentage.

Ainsi, une variation de un pour cent dans BB' occasionne une variation de deux pour cent dans la correction circulaire.

Supposons par exemple que OB ait un mètre de long dans un pendule qui bat la seconde lorsqu'il oscille sous un angle de 6° environ, c'est-à-dire lorsque $BB' = 10$ cm.; la réduction de la durée d'oscillation à la formule (A) sera la fraction $\frac{1}{6400}$, de sorte que dans un jour de 24 heures, le pendule effectuerait, d'après la formule (A), $\frac{86400}{6400} = 13,5$ battements de plus; et si BB' était de 11 cm. c'est-à-dire subissait une augmentation de 10 %, la correction du pendule augmenterait de 20 % et le pendule perdrait 2,7 secondes par jour.

Un pendule « invar » permettra de se rendre compte du résultat paradoxal d'une correction négative concernant la température, à cause de la correction due à l'influence de l'air.

Dans les expériences d'Airy sur la gravité au moyen d'un pendule oscillant au fond d'une mine profonde, la différence observée représente à peu près la moitié de la correction due à l'influence de l'air ambiant dans un pendule ordinaire; de sorte que le pendule d'Airy oscillant à la surface aurait pu synchroniser avec le pendule du fond de la mine, à supposer qu'il oscillât dans un air raréfié ne présentant plus que la moitié environ de la densité atmosphérique.

4. — L'équation (11) conduit immédiatement à la solution du problème par les fonctions elliptiques, dans le cas d'un mouvement à oscillations d'amplitude finie; car on a, en représentant l'angle FAR par φ ,

$$(19) \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l} \cdot \frac{\overline{ET}^2}{\overline{ET}^2},$$

et si nous supposons que le cercle FRF' tourne autour de

FF' de façon à devenir horizontal

$$(20) \quad \frac{\overline{ET}^2}{EF^2} = 1 - \frac{\overline{TR}^2}{EF^2} = 1 - \frac{\overline{AF}^2}{EF^2} \sin^2 \varphi = 1 - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \sin^2 \varphi .$$

Il est avantageux de poser $g = ln^2$ de sorte que n représente la vitesse angulaire de rotation d'un pendule conique de hauteur l autour de la verticale; on a alors

$$(21) \quad \frac{d\varphi}{dt} = n \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \varphi} = n \Delta(\varphi, \alpha) \quad , \quad \alpha = \sin^2 \frac{1}{2} \alpha .$$

$$(22) \quad nt = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F\varphi \quad \text{ou} \quad F(\varphi, \alpha) ,$$

selon la notation de Legendre.

En renversant la fonction, suivant l'idée d'Abel,

$$(23) \quad \varphi = \text{am } nt, \quad \text{ou} \quad \text{am}(nt, \alpha) ,$$

dans la notation de Jacobi; puis

$$(24) \quad AT = AF \cos \varphi . \quad \text{ou} \quad \text{tg} \frac{1}{2} \mathfrak{F} = \text{tg} \frac{1}{2} \alpha \text{cn } nt ,$$

dans la notation de Guderman; alors

$$(25) \quad ET = EF \Delta\varphi \quad \text{ou} \quad \sec \frac{1}{2} \mathfrak{F} = \sec \frac{1}{2} \alpha \text{dn } nt$$

$$(26) \quad \sin \frac{1}{2} \mathfrak{F} = \sin \frac{1}{2} \alpha \frac{\cos \varphi}{\Delta\varphi} = \alpha \frac{\text{cn } nt}{\text{dn } nt} = \alpha \text{sn}(K - nt) .$$

Prolongeons RA jusqu'à son intersection Q avec le cercle de diamètre AD; l'angle ADQ = φ ; menons l'horizontale N'QP' rencontrant l'arc AB' en P', puis l'horizontale PQ'N rencontrant la verticale AD en N; P' sera alors un pendule analogue à P, oscillant suivant le même arc BAB'; et P' passe par le point le plus bas A au moment où P quitte le point le plus élevé B; ainsi P et P' oscillent en discordance de phase, et l'écart atteint le quart de la période complète. Or on a

$$(27) \quad AD = \frac{\overline{AP}^2}{AE} \quad \text{et} \quad AN = \frac{\overline{AQ}^2}{AD} = AD \sin^2 \varphi .$$

$$(28) \quad \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AQ}^2} = \frac{AE}{AD} , \quad \overline{AP}^2 = AD \cdot AE \sin^2 \varphi = \overline{AB}^2 \sin^2 \varphi ,$$

et, en représentant l'angle AOP' par ϑ' ,

$$(29) \quad \sin \frac{1}{2} \vartheta' = \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \varphi = \kappa \operatorname{sn} nt, \quad \cos \frac{1}{2} \vartheta' = \operatorname{dn} nt,$$

dans la notation de Gudermann.

En comparant ces formules aux formules (26) on sera conduit aux relations concernant des fonctions elliptiques présentant un écart de phase d'un quart de période elliptique K dans l'argument elliptique u , comme par exemple

$$(30) \quad \operatorname{sn}(K-u) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \text{etc.}$$

car

$$(31) \quad \operatorname{ADQ}' = \varphi' = \operatorname{am}(K-nt),$$

lorsque

$$\operatorname{ADQ} = \varphi = \operatorname{am} nt;$$

et dans la notation de Legendre

$$(32) \quad \sin \varphi' = \frac{\cos \varphi}{\Delta \varphi}, \quad \cos \varphi' = \frac{\kappa' \sin \varphi}{\Delta \varphi}, \quad \Delta \varphi' = \frac{\kappa}{\Delta \varphi},$$

$$(33) \quad \cot \varphi \cot \varphi' = \kappa' = \Delta \varphi \Delta \varphi',$$

de sorte que la relation est réciproque entre φ et φ' .

De même

$$(34) \quad \operatorname{AP} = \operatorname{AB} \sin \varphi' = \operatorname{AB} \frac{\cos \varphi}{\Delta \varphi}.$$

Le quart de période elliptique K est défini par

$$(35) \quad K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \\ = \frac{1}{2} \pi \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \kappa^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \kappa^4 + \dots \right],$$

le second terme de la série donnant la correction circulaire employée dans la formule (15); et les inégalités (13) montrent que

$$(36) \quad \frac{1}{2} \pi < K < \frac{1}{2} \pi \sec \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\kappa'},$$

en employant la notation des fonctions elliptiques,

$$(37) \quad z = \sin \frac{1}{2} \alpha, \quad z' = \cos \frac{1}{2} \alpha,$$

et $\frac{1}{2} \alpha$ se nomme l'angle modulaire.

Mais $\frac{\frac{1}{2} \pi}{\sqrt{z'}}$ est encore une limite supérieure de K, car

$$(38) \quad \frac{1}{\sqrt{z'}} - \frac{K}{\frac{1}{2} \pi} = \frac{z^4}{64} \dots$$

et $\frac{1}{2} \pi \sqrt{\sec \frac{1}{2} \alpha}$ peut être utilisé comme valeur approchée de K, à moins de 0,13 % près jusqu'à un angle modulaire $\frac{1}{2} \alpha$ de 30°, de 0,75 % jusqu'à 45° et de 3 % jusqu'à 60°.

Lorsque $z = 1$ les oscillations du pendule sont de 360°, et $K = \infty$; on obtiendra une limite inférieure de K dans le voisinage de $z = 1$ en écrivant

$$(39) \quad K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\frac{z \sin \varphi}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi}} + \sqrt{\left(\frac{1 - z \sin \varphi}{1 + z \sin \varphi} \right)} \right] d\varphi;$$

la première intégrale est $\frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$, et la seconde est finie et devient $\log 2$ lorsque $z = 1$.

En utilisant cette approximation, nous trouvons qu'un pendule qui bat la seconde lorsqu'il effectue de petites oscillations mettrait 6,5 secondes environ pour effectuer une oscillation en partant à une minute du point le plus haut du cercle, mais ce temps est théoriquement infini si le pendule part rigoureusement de ce point. Cette instructive application numérique est due à M. E. LAMPE (Berlin). La table de Legendre ne fournit pas la valeur de K en question.

5. — On peut démontrer que QQ' passe par un point fixe L de AD, le point de Landen, tel que EL = EB; et que PP' est tangent à l'arc de cercle BLB' de centre E.

Car, de la relation (33) on tire

$$(40) \quad z' = \cos \frac{1}{2} \alpha = \cot \varphi \cot \varphi' = \frac{DQ \cdot DQ'}{AQ \cdot AQ'} = \frac{\text{triangle } QDQ'}{\text{triangle } QAQ'} = \frac{DL}{LA},$$

ce qui prouve que L est un point fixe sur AD ;

$$(41) \quad AL = \frac{AD}{1 + \cos \frac{1}{2} \alpha} = \frac{AE \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{1 + \cos \frac{1}{2} \alpha} = AE \left(1 - \cos \frac{1}{2} \alpha \right),$$

$$EL = EA \cos \frac{1}{2} \alpha = EB ,$$

et, puisque

$$(42) \quad ET = EF \cdot \Delta \varphi , \quad ET' = EF' \cdot \Delta \varphi' ,$$

$$(43) \quad ET \cdot ET' = \overline{EF}^2 \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \varphi' = \overline{EF}^2 \cos \frac{1}{2} \alpha = EA \cdot EF ,$$

c'est-à-dire une constante; et par suite

$$(44) \quad EP \cdot EP' = EA \cdot EB ,$$

une constante également; et, en tenant compte de la proposition C (n° 1), nous voyons que la perpendiculaire abaissée de E sur PP' a pour longueur

$$(45) \quad \frac{EP \cdot EP'}{EA} = EB ,$$

ce qui prouve que PP' est tangent au cercle BLB'.

La similitude des triangles DLQ, ALQ' montre que

$$(46) \quad \frac{LQ}{LA} = \frac{DQ}{AQ'} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi'} = \Delta \varphi = du \, nt = \frac{ET}{EF} = \frac{EB}{EP} = \frac{EP'}{EA} .$$

A l'aide de la figure, on pourra interpréter la transformation du second ordre de Landen au point de vue dynamique et géométrique.

Posant $CL = \lambda$. CA, C étant le centre du cercle AQD, on a

$$(47) \quad \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} = \frac{DL}{LA} = \cos \frac{1}{2} \alpha = \alpha' , \quad \lambda = \frac{1 - \alpha'}{1 + \alpha'} = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{4} \alpha ;$$

et en appelant ψ l'angle ALQ et ψ' l'angle CQL, la vitesse de Q sera donnée par

$$(48) \quad AD \frac{d\varphi}{dt} , \quad \text{ou} \quad LQ \frac{d\psi}{dt} \sec \psi' ,$$

$$(49) \quad \frac{d\psi}{\cos \psi'} = \frac{AD}{LQ} d\varphi = \frac{AD}{AL} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} = (1 + \alpha') \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} ;$$

et

$$(50) \quad \frac{\sin \psi'}{\sin \psi} = \frac{CL}{CQ} = \lambda, \quad \cos \psi' = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \psi} = \Delta(\psi, \lambda);$$

de sorte que

$$(51) \quad \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, \lambda)} = (1 + \kappa') \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \kappa')} = (1 + \kappa') nt;$$

et, puisque ψ croît de 0 à π lorsque φ croît de 0 à $\frac{1}{2}\pi$,

$$(52) \quad 2L = \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, \lambda)} = (1 + \kappa') \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, \kappa')} = (1 + \kappa') K.$$

Il est commode de poser

$$(53) \quad nt = hK, \quad \text{de sorte que} \quad h = \frac{t}{\frac{1}{4}T},$$

où T est la période complète d'une oscillation double; l'équation (51) montre alors que

$$(54) \quad \psi = am \ 2hL, \quad \text{lorsque} \quad \varphi = am \ hK, \quad \varphi' = am(1 - h)K;$$

$$(55) \quad \sin 2hL = \sin \psi = \frac{NQ}{QL} = \frac{AD \sin \varphi \cos \varphi}{AL \cdot \Delta \varphi} = (1 + \kappa') \frac{\operatorname{sn} hK \operatorname{cn} hK}{\operatorname{dn} hK},$$

ce qui est la transformation de Landen.

D'une autre façon, puisque

$$(56) \quad \psi = LDQ + LQD = \varphi + \frac{1}{2}\pi - \varphi',$$

$$(57) \quad \begin{aligned} \sin \psi &= \cos(\varphi' - \varphi) = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \\ &= (1 + \kappa') \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta \varphi'}, \end{aligned}$$

comme dans (55), et de même

$$(58) \quad \begin{aligned} \cos \psi &= \sin(\varphi' - \varphi) = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \\ &= \frac{\cos^2 \varphi}{\Delta \varphi} - \frac{\cos^2 \varphi'}{\Delta \varphi'} = \frac{\Delta \varphi - \Delta \varphi'}{1 - \kappa'} = \frac{LQ - LQ'}{2CL}, \end{aligned}$$

dont l'interprétation géométrique est évidente.

L'équation (55) peut aussi s'écrire

$$(59) \quad \operatorname{sn} 2hL = \frac{1 + \alpha'}{\alpha} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{dn} 2hK}{1 + \operatorname{dn} 2hK}},$$

$$(60) \quad \operatorname{dn} 2hK = \frac{1 - \lambda \operatorname{sn}^2 2hL}{1 + \lambda \operatorname{sn}^2 2hL}, \quad \operatorname{sn} 2hK = \frac{(1 + \lambda) \operatorname{sn} 2hL}{1 + \lambda \operatorname{sn}^2 2hL},$$

ce qui est la seconde forme de la transformation de Landen.

L'avantage que présente l'emploi de hK et $2hL$ comme argument elliptique réside dans le fait que le module correspondant λ est renfermé implicitement et n'a pas besoin d'être indiqué explicitement.

Le temps que met le pendule pour aller de P à P' est le même que pour aller de B à A ; c'est la moitié de la durée d'une oscillation; de sorte que l'horizontale passant par L divise l'arc d'oscillation en quatre parties qui sont décrites en des temps égaux.

Par exemple, si l'angle d'oscillation est de 240° , de II à X heures sur un cadran d'horloge, L coïncide avec O , et le pendule emploiera le quart de la durée d'une oscillation pour passer de la position horizontale à la position verticale, de III à VI heures.

Si l'angle d'oscillation est de 300° , de I à XI heures, on peut prouver que le pendule parcourra le même angle, de III à VI heures, en un sixième du temps nécessaire pour une oscillation.

M. APPELL a montré d'une façon très élégante la double périodicité de la fonction elliptique, en renversant la gravité au moment où le pendule arrive en B ; il battra alors la fonction elliptique sur l'arc BEB' avec le module complémentaire (comodule) $\alpha' = \cos \frac{1}{2} \alpha$, et n est changé en ni .

6. — Le mouvement de va et vient du pendule de B à B' est représenté par le mouvement de T , accompagné de la révolution de R autour du cercle FRF' , que l'on peut supposer dans un plan horizontal.

La période complète de ce mouvement est

$$(61) \quad 4K \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{ou} \quad 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

pour des oscillations infiniment petites; et c'est le mouvement important lorsque le plan d'oscillation est regardé d'en face.

Le mouvement de haut en bas de P est tout ce que l'on peut voir lorsqu'on se place dans le plan même d'oscillation; et ce mouvement est accompagné par la révolution de Q autour du cercle AQD, que l'on peut faire tourner d'un angle droit autour de AD pour le rendre visible, et le mouvement de Q sera analogue à celui d'un pendule qui effectuerait des rotations complètes.

La période de ces oscillations de haut en bas est la moitié de celle du mouvement de va et vient, c'est-à-dire qu'elle est de

$$(62) \quad 2K \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{ou} \quad \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ secondes,}$$

autrement dit la durée d'une oscillation simple; cela représente une seconde pour le pendule battant la seconde, la période complète du mouvement de va et vient étant de deux secondes.

La détermination expérimentale la plus exacte de g s'obtient en mesurant la longueur L du pendule qui bat la seconde, ou la longueur l du pendule qui bat t secondes; après avoir réduit cette longueur pour être ramené au cas d'oscillations imperceptibles, on aura

$$(63) \quad g = \pi^2 L = \pi^2 \frac{l}{t^2}.$$

Ainsi la valeur $g = 981 \text{ cm/sec.}^2$ implique une longueur $L = 99,4 \text{ cm.}$, que l'on suppose trouvée expérimentalement.

Il serait alors plus logique d'écrire la formule (A), donnant la durée d'une oscillation, sous la forme

$$(64) \quad \sqrt{\frac{l}{L}}, \quad \text{au lieu de} \quad \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

cette formule renfermant directement la longueur mesurée L , au lieu du nombre calculé g , sans parler de la complication additionnelle du facteur π .

Un exposé de la question assez analogue à celui qui vient d'être donné se trouve dans les *Nouvelles Annales* (1902 et 1904)¹.

Sir George GREENHILL (Londres).

(Traduction de J.-P. DEMUR, Genève).

¹ Consulter aussi *Auslese aus meiner Unterrichts- u. Vorlesungspraxis*, von Herrn. SCHUBERT, Leipzig, 1905.